به نام زندگی

کدینگ منبع (فشرده سازی Lossless)

* مثال: منبع با الفبای $\{a, b, c, d\}$ با احتمالات $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$

$a \to x_1$, $b \to x_2$, $c \to x_3$, $d \to x_4$

روش پیشنهادی اول

$c(x_1) = 00 \rightarrow \ell(x_1) = 2$

$c(x_2) = 01 \rightarrow \ell(x_2) = 2$

$c(x_3) = 10 \rightarrow \ell(x_3) = 2$

$c(x_4) = 11 \rightarrow \ell(x_4) = 2$

$\rightarrow \begin{cases} L = \mathbb{E}\{\ell(x)\} \\ L = 2 \end{cases}$

از طرف دیگر می دانیم

$$H(X) = \frac{7}{4} \text{ bits}$$

$$2 = L > H(X) = \frac{7}{4}$$

به این ترتیب به حد آنتروپی منبع نرسیدیم. اما کدینگ دیگری این گونه ساده است و در گیر نشده بدون ابهام می توانیم با این اطلاعات را انجام دهیم.

در واقع چون در این روش پیشنهادی خصوصیات آماری منبع را در نظر نگرفتیم، نتوانستیم به حدهای فشرده سازی برسیم. به طور کلی در روش هایی که کدینگ با کدهای با طول ثابت انجام می گیرد

برحسب آنتروپی برسیم، مگر اینکه خصوصیات آماری منبع یکسان فرض شده باشد. بنابراین لازم است در طراحی که به خصوصیات آماری منبع نیز توجه کنیم.

با توجه به اینکه هدف ما رسیدن به صرفه‌جویی در ذخیره‌سازی و استفاده بهینه از پهنای باند است، باید اختصاص دهیم که به الفبای منبع را به گونه‌ای انجام دهیم که الفبای با احتمال بیشتر، دارای کلمه کد با طول کمتر باشد. در این صورت در بیشتر موارد کلمه کد با طول کمتر روی کانال فرستاده می‌شود و از پهنای باند به شکل بهتری استفاده می‌گردد

توجه به این نکته لازم است که کلمه کد گرفته شده باید بدون از بین رفتن قابل انجام باشد.

روش پیشنهادی دوم

$C(x_1) = 0$ $\quad P_r\{X = x_1\} = \frac{1}{2}$

$C(x_2) = 10$ $\quad P_r\{X = x_2\} = \frac{1}{4}$

$C(x_3) = 101$ $\quad P_r\{X = x_3\} = \frac{1}{8}$

$C(x_4) = 111$ $\quad P_r\{X = x_4\} = \frac{1}{8}$

$$l(x_1) = 1, \quad l(x_2) = 2, \quad l(x_3) = l(x_4) = 3$$

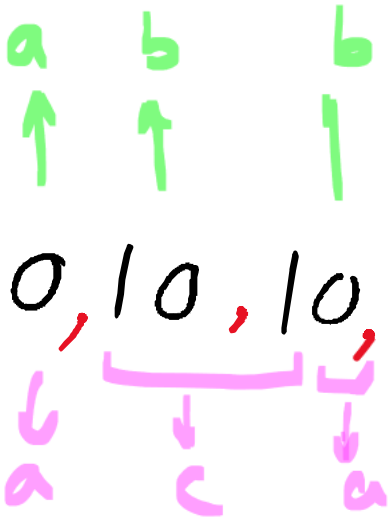
$$L = E\{l(x)\} = \sum_{i=1}^{4} l(x_i) P(x_i)$$

$$L = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times 3 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{4} \text{ bits}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} = L = H(x) = \frac{7}{4} \text{ bits}$$

همان طور که می‌بینیم با این روش پیشنهادی به حد آنتروپی می‌رسیدیم. البته دلیل اینکه طول کلمات که برای الفباهای مختلف صنبع، متفاوت است، پیچیدگی کدینگ و دیکدینگ نسبت به روش اول بیشتر است. علاوه بر این دیکدر باید بتواند با دریافت رشته بیت ارسالی، الفبای صنبع را بدون ابهام بازیابی کند.

فرض کنیم رشته بیت دریافتی به صورت زیر باشد



در دیکدر باید عملیات جداسازی کلمات کد Puncturing به درستی انجام باشد. همان طور که می بینیم در رشته بیت دریافتی، وقتی دیکدر می خواهد کلمات کد را از رشته بیت جدا کند، دچار ابهام می شود زیرا برای جداسازی '10' در این رشته بیت، این ابهام وجود دارد که آیا سمبل b به دنبال سمبل a ارسال شده است یا

مکمله که '151' برده است که - یعنی این است که سمبل a به دنبال سمبل c ارسال شده است.

دلیل این ابهام این است که کلمه که $c(x_4)$ پیشوند کلمه که $c(x_3)$ است و این اشتباه در حالی که، همواره باعث ابهام در جداسازی کلماتی که در کنار هم قرار می‌گیرند.

ترجمه داشته باشیم که خطا در بازیابی اطلاعات و همچنین انتشار خطا، به دلیل جزایی

که در کانال رخ می دهد، حداره وجود دارد و با استفاده از روشهای مناسب کنترل
تمایل کنترل و حذف یا کاهش است. اما ایجاد ابهام در دیدگاه - دلیل موارد
نادرست، باعث خطاهای غیر قابل کنترل می شود که باید در جایی که منتظر
قرار بگیرد.

بنابراین در روش پیشنهادی سوم، کلماتی که رابطه گونه ای در نظر گرفته که هیچ کلمه کلیدی
پیشنهاد نکند که دیگر نباشد.

* روش پیشنهادی سوم:

$C(x_1) = 0$

$C(x_2) = 10$

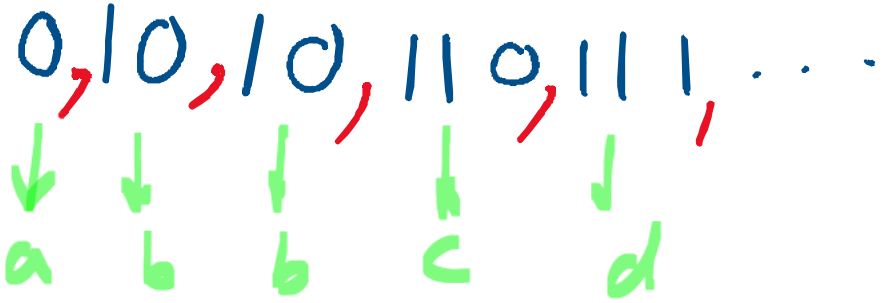
$C(x_3) = 110$

$C(x_4) = 111$

$\Rightarrow L = \epsilon\{l(m)\} = \frac{7}{4}$ bits

, $L = H(X)$

بدین ترتیب به صورتهای فشرده‌سازی رسیده‌ایم و علاوه بر این ابهای در جداسازی کلمات که در دیکد، نخواهیم داشت. به عنوان مثال رشته بیت در پایین را در نظر می‌گیریم.



بدین ترتیب گرفته می‌شود بدون ابهام

عملیات جداسازی کلمات کد (puncturing) را انجام دهید سپس با کدک جدول کلمات کد، اطلاعات ارسالی را بازیابی کنید. برای اینکه خطا در

از داده‌های اضافات به میزان الخداه کم باشد و انتشار خطا قابل کنترل باشد، از روش‌های مناسب که یک و دیگر یک استفاده می‌کنیم.

حال که به صورت شهودی و با یک مثال، با مفاهیم لازم برای تحلیلی که منجر آشنا شدیم، می‌خواهیم این مفاهیم را در چارچوب ریاضی نیز معرفی کنیم.

اولین شهودی که در ارتباط با گره‌های منبع تعریف می‌شود معدوم غیرسینگولار بودن

Non-Singular

است.

* non-singular بودن کدهای منبع

مفهوم غیرسینگولار بودن کدهای منبع به طور ساده به این معنی است که به هر یک از الفبای منبع که متغیر به خود تخصیص داده شود. با بیان ریاضی

$$\forall x_i, x_j \in \chi_i \quad x_i \neq x_j \implies C(x_i) \neq C(x_j)$$

یا به طور معادل (خلاف نقیض)

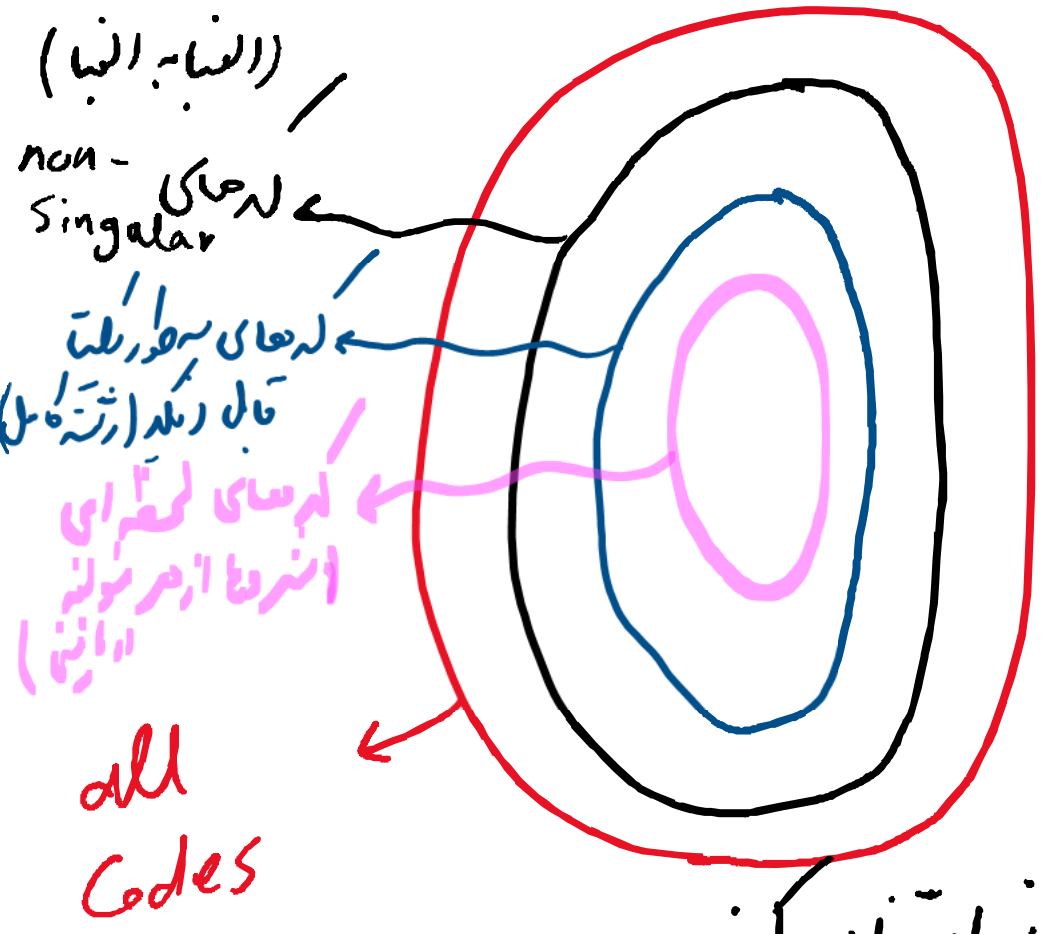
$$C(x_i) = C(x_j) \implies x_i = x_j$$

* غیر سیلوژیسم که منبع اولین شرط برای دکارتیک بودن ابهام گیست.

* همان طور که دیدیم، شرط دیگر برای دکارتیک بودن ابهام، این است که جمیع کلمه گیری، پیشوند کلمه گیر دیگر نباشند. به عبارت دیگر، گیر منبع به گیر self puncture باشد. برای اینکه این مفهوم را به صورت ریاضی بیان کنیم، نیاز به مفاهیم مقدماتی داریم که در ادامه به بیان آنها می پردازیم.

* یک پیشنهاد برای self puncturing کرمهای منبع، می‌تواند به این شکل باشد که
یک علامت اضافی مانند '0' یا '1' را در بین کلمات که حداکثر هم

به عنوان جمع بندی، نمودار
زیر در شناخت مفاهیم مطرح
در کدهای منبع، می تواند
کمک کننده باشد.



در واقع در کدهای منبع (فشرده سازی lossless)
ما به دنبال یافتن کدهای لحظه ای مناسب هستیم.
طوری که سایلنس طول کلماتی که آن تاحد امکان به
آنتروپی نزدیک باشد و بهترین شکل از بیت های باقی استفاده کنیم.

مطالبات برای یافتن کدهای منبع مناسب، به ابداع روشهایی برای کدینگ منبع منجر شده است. در ادامه می خواهیم دو کد منبع پرکاربرد را معرفی کنیم.

کد اول، کد Shannon-Fano که کد منبع زودبهینه است و

کد دوم کد Huffmann که کد روش کد بهینه است.

* کدینگ Shannon-Fano

با توجه به اینکه در طراحی کدهای منبع، هدف این است که به کد لحظه‌ای برسیم که میانگین

طول کلمات کد ، تا حد ممکن به آنتروپی منبع نزدیک باشد، الگوریتم زیر برای تعیین طول کلمات کد الفبای منبع ، با توجه به خصوصیات آماری منبع توسط Shannon_Fano مطرح شده است.

می دانیم

$$H(X) = E\left\{\log \frac{1}{P(x)}\right\} = \sum_x P(x) \log \frac{1}{P(x)}$$

از طرف دیگر

$$L = E\{\ell(x)\} = \sum_x P(x)\, \ell(x)$$

همان طور که می‌بینیم، اگر بتوانیم $l(x_i)$ را برابر $\log \frac{1}{P(x_i)}$ قرار دهیم، به حد آنتروپی می‌رسیم. اما می‌دانیم که $l(x_i)$ همواره یک عدد صحیح است در صورتی که $\log \frac{1}{P(x_i)}$ در حالت کلی یک عدد صحیح نیست.

بنابراین برای اینکه تا حد ممکن بتوانیم به حد آنتروپی نزدیک شویم، در روش Shannon-Fano، طول کلماتی که را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$l(x_i) = \left[\log \frac{1}{P(x_i)} \right]^+$$

به این ترتیب شرط اساسی تئوری اطلاعات به صورت $L \geq H(X)$ برقرار است. تا حدی به آنتروپی منبع نزدیک هستیم.

* برای طراحی می‌کند shannon-Fano در حالت M-ary

$M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$

رابطه طول کلمات که ، برای هر یک از الفبای منبع به صورت زیر خواهد بود.

$$l(x_i) = \left\lceil \log_M \frac{1}{P(x_i)} \right\rceil^+$$